

# Výpočet rakety

## Základní vztahy pro výpočet raketového motoru.

Tah raketového motoru  $P$  (v jednotkách N, SI):

$$P = G \cdot w + S_a(p_a - p_H)$$

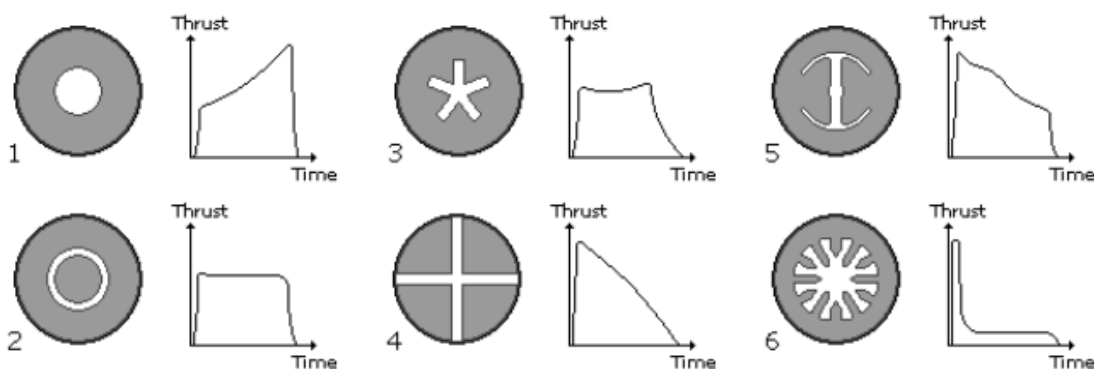
kde  $G$  je vteřinové průtočné množství pohonných látek,  $w$  je výtoková rychlost a  $p_a$  tlak expandujících plynů ve výstupním průřezu trysky  $S_a$  a  $p_H$  je atmosférický tlak ve výšce  $H$ . Měrný tah (specifický impuls)  $I_{sp}$  (v jednotkách N.s/kg = m/s): udává, jak velká část tahu raketového motoru se získá z 1 kg pohonných látek, spálených v motoru za 1 s,

$$I_{sp} = \frac{P}{G} = w + \frac{S_a(p_a - p_H)}{G} = w_{ef}$$

kde  $w_{ef}$  je efektivní výtoková rychlost ve výšce  $H$ . Specifický impuls je tedy mírou efektivní výtokové rychlosti plynů z motoru. Největší je ve vakuu a nižší na hladině moře. Výtoková rychlost plynů z trysky

$$w = \sqrt{\frac{2 \kappa}{\kappa - 1} \frac{RT_0}{M_v} \left[ 1 - \left( \frac{p_a}{p_0} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right]}$$

kde  $\kappa$  je adiabatická konstanta,  $R$  - univerzální plynová konstanta 8,3145,  $M_v$  - molekulová hmotnost zplodin hoření,  $p_0$  a  $p_a$  jsou tlaky ve spalovací komoře a na výstupu z trysky a  $T_0$  je teplota hoření. Je vidět, že  $w$  je tím větší, čím je větší  $I_{sp}$  a  $p_0$  nebo čím je menší  $M_v$ . Výtoková rychlost je pro daný poměr výstupního a kritického průřezu trysky konstantní po celou dobu činnosti v důsledku toho, že ač se tlaky mění, poměr  $p_a/p_0$  zůstává konstantní. Čím větší poměr průřezů, tím větší výtoková rychlost.



Profily zrna TPL a odpovídající závislosti tahu na době hoření

Maximální rychlost proudění se dosáhne, podaří-li se proměnit veškerou tepelnou energii v kinetickou energii plynu. Tj. po expanzi bude  $H = 0$ , resp.  $T = 0$ . Tudíž

$$w_{max} = \sqrt{\frac{2 \kappa RT_0/M_v}{\kappa - 1}} = a_0 \sqrt{\frac{2}{\kappa - 1}} \quad a_0 = \sqrt{\kappa RT_0/M_v}$$

$a_0$  je rychlost zvuku v plynu ve spalovací komoře. Maximální rychlost  $w_{max}$  závisí jen na počáteční teplotě  $T_0$ , nezáleží na počátečním tlaku  $p_0$  (ve spalovací komoře). I když by se zdálo, že s růstem  $p_0$  poroste  $w_{max}$ , není tomu tak. Srůstem  $p_0$  roste totiž i  $\rho_0$  takže zvýšený tlak  $p_0$  udělí stejnou  $w_{max}$  plynu s větší  $\rho_0$ .  $w_{max}$  odpovídá  $p_a = 0$  a tudíž také  $p_a/p_0 = 0$ , expanzi do vakua.

Závislost parametrů plynu na místní rychlosti proudění

$$T = T_0 \left(1 - \frac{w^2}{w_{max}^2}\right) \quad \text{tj. s rostoucí rychlostí klesá teplota plynu.}$$

$$p = p_0 \left(1 - \frac{w^2}{w_{max}^2}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad \rho = \rho_0 \left(1 - \frac{w^2}{w_{max}^2}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \quad \frac{T_{kr}}{T_0} = \frac{2}{\kappa+1} \quad \frac{p_{kr}}{p_0} = \left(\frac{T_{kr}}{T_0}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$

$$\text{Místní rychlost zvuku} \quad a = \sqrt{\frac{\kappa-1}{2} (w_{max}^2 - w^2)} = \sqrt{\kappa \frac{RT}{M_v}} \quad \frac{\rho_{kr}}{\rho_0} = \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \quad C_P = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{R}{M_v}$$

Kritická výtoková rychlost

$$w_{kr} = w_{max} \sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}} = a_0 \sqrt{\frac{2}{\kappa+1}} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa+1} RT_0/M_v}$$

Kritické parametry

$$\left(1 - \frac{w_{kr}^2}{w_{max}^2}\right) = \frac{2}{\kappa+1} \quad p_{kr} = p_0 \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad \rho_{kr} = \rho_0 \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \quad T_{kr} = T_0 \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)$$

Průtočné množství  $G$  (kg/s)

$$G = \rho_{kr} w_{kr} S_{kr} = \frac{p_0 S_{kr}}{\sqrt{RT_0/M_v}} \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa+1}} = \rho_a w_a S_a$$

Je to maximální průtok při dosažení kritického proudění v ústí trysky

$$\rho_a = \rho_0 \left(\frac{p_a}{p_0}\right)^{\frac{1}{\kappa}} = \frac{p_0 M_v}{R T_0} \left(\frac{p_a}{p_0}\right)^{\frac{1}{\kappa}}$$

$$G = S_a \frac{p_0 M_v}{RT_0} \left(\frac{p_a}{p_0}\right)^{\frac{1}{\kappa}} \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} \frac{RT_0}{M_v} \left[1 - \left(\frac{p_a}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right]} = S_a \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} \frac{p_0^2 M_v}{RT_0} \left[\left(\frac{p_a}{p_0}\right)^{\frac{2}{\kappa}} - \left(\frac{p_a}{p_0}\right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa}}\right]}$$

$$G = S_a p_0 \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} \frac{M_v}{RT_0} \left[\left(\frac{p_a}{p_0}\right)^{\frac{2}{\kappa}} - \left(\frac{p_a}{p_0}\right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa}}\right]}$$

$$G = \sqrt{\kappa} \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}} \frac{p_0 S_{kr}}{\sqrt{RT_0/M_v}} = \frac{p_0 S_{kr}}{\beta}$$

Dále se zavádí ještě parametr  $\beta$

$\beta = p_0 \frac{S_{kr}}{G} = B_k \sqrt{T_0} = c^*$  Parametr  $\beta$  má rozměr měrného tahu [N.s/kg = m/s] a nazývá se *komplexem parametrů raketového motoru* nebo *charakteristickou rychlostí*. Parametr  $B_k$  závisí na složení spalín.

$$B_k = \left(\frac{\kappa + 1}{2}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \sqrt{\frac{\kappa + 1}{2\kappa}} R/M_v$$

$\beta$  závisí pouze na vlastnostech pohonných látek (u chemických pohonných látek je  $\beta$  mezi 1500 – 2000 N.s/kg). Parametr  $\beta$  se udává v tabulce vlastností pohonných látek. Známe-li  $\beta$ , můžeme nalézt  $S_{kr}$ , nutnou k průchodu množství plynů  $G$  [kg/s] při tlaku  $p_0$  [kg/s]. Při zvětšení průtoku pohonných látek  $G$  motorem při konstantní  $S_{kr}$  znamená zvětšení  $p_0$  ve spalovací komoře. Je to dáno tím, že rychlost v kritickém průřezu nezávisí na průtoku pohonné látky a při stále teplotě  $T_0$  se nemění. Dojde-li ke zvětšení  $G$ , zvětší se i hustota  $\rho$  pohybujícího se plynu. Při konstantní teplotě se tak hustota plynu může zvětšit pouze zvýšením tlaku v komoře

Plocha výstupního průřezu trysky (*index a*)  $S_a$

$$\text{Výtoková rychlost } w_a = \sqrt{\frac{2\kappa RT_0/M_v}{\kappa-1} \left(1 - \left(\frac{p_a}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right)} \quad Mach_a = \sqrt{\frac{2}{\kappa-1} \left[\left(\frac{p_0}{p_a}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1\right]}$$

$$\frac{p_{kr}}{p_a} = \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} Mach_a^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad (?)$$

$$G = \rho_0 S_a \left(\frac{p_a}{p_0}\right)^{\frac{1}{\kappa}} \sqrt{\frac{2\kappa RT_0/M_v}{\kappa-1} \left(1 - \frac{p_a}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}$$

$$\frac{S_a}{S_{kr}} = \frac{\frac{\kappa-1}{2} \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}}}{\sqrt{\left(\frac{p_a}{p_0}\right)^{\frac{2}{\kappa}} - \left(\frac{p_a}{p_0}\right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa}}}} = \frac{\left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{2}{\kappa-1}} \left(\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\right)}{\sqrt{\left(\frac{p_a}{p_0}\right)^{\frac{2}{\kappa}} - \left(\frac{p_a}{p_0}\right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa}}}} = \frac{\left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \left(\frac{p_0}{p_a}\right)^{\frac{1}{\kappa}}}{\sqrt{\frac{\kappa+1}{\kappa-1} \left[1 - \left(\frac{p_a}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right]}}$$

Všechny vztahy jsou totožné, jsou odvozeny z rovnice kontinuity a adiabatických vztahů. Rozšíření trysky závisí při konstantním  $\kappa$  jen na poměru  $p_a/p_0$ . (tento vztah platí pro libovolný průřez  $S_x$ , dosažený za  $S_a$ . Tento poměr bývá 15 až 400. Rychlost a teplota v libovolném průřezu trysky jsou závislé na rozměrech a zákonu změny  $S_x$  podél délky trysky  $x$ . Tato rovnice platí jak pro podzvukovou, tak pro nadzvukovou část trysky.

Poznámka: aby vůbec došlo k nadzvukovému proudění, musí být  $w_a > w_{kr}$ , tj.

$$\sqrt{\frac{2\kappa RT_0/M_v}{\kappa-1} \left(1 - \frac{p_a}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} > \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa+1} RT_0/M_v}$$

Tepelná účinnost raketového motoru. Maximální účinnosti by raketový motor dosáhl tehdy, je-li dosaženo výtokové rychlosti  $w_{max}$ , tj. úplné přeměny celkové entalpie v kinetickou energii plynů.

$$\eta_t = 1 - \frac{T_a}{T_0} = 1 - \left(\frac{p_a}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

Zvýšením  $p_0$  při konstantním  $p_a$  se zvýší  $\eta_t$  a tím i  $w_a$ . Roste i měrný tah motoru. Při daném tahu motoru můžeme snížit  $G$ , tudíž i rozměry motoru a tím se zmenší i tepelné ztráty motoru. Zvýšením  $p_0$  je možné zmenšit objem komory, aniž se zmenší doba prodlevy  $\tau$  plynu v komoře. Celkově lze říci, že zvýšení  $p_0$  zlepšuje charakteristiky raketového motoru.

Účinnost využití paliva:

$$\eta_p = \frac{2 \cdot w \cdot v}{v^2 + w^2} = \frac{2 \cdot \frac{v}{w}}{1 + \left(\frac{v}{w}\right)^2}$$

Je-li  $V_0$  objem spalovací komory, pak lze zavést charakteristickou délku spalovací komory poměrem  $L \approx V_0/S_{kr}$ . Obvykle mívá parametr  $L$  hodnoty v rozmezí 0,6 – 1,5 m. Je-li dále  $V_{vt}$  objem, vzniklý spálením  $G$ , tj.  $V_{vt} = GRT_0/p_0$ , potom doba prodlevy plynu v komoře je  $\tau = V_0/V_{vt} = V_0 p_0 / GRT_0$ . Volba parametru  $\tau$  určuje objem spalovací komory. Nicméně přesné určení rozměrů spalovací komory plyne z analýzy procesů hoření a plynové dynamiky ve spalovací komoře.

Tah raketového motoru:

$$P = G \cdot w + S_a(p_a - p_H) \quad p_H \text{ je okolní tlak v dané výšce}$$

### Konická a zvonovitá tryska

U konické trysky se při tvorbě tahu uplatní pouze axiální složky průtoku hmoty a výtokové rychlosti. Je-li úhel rozevření trysky  $\alpha$ , pak

$$P = G \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot w \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = G \cdot w \cdot \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

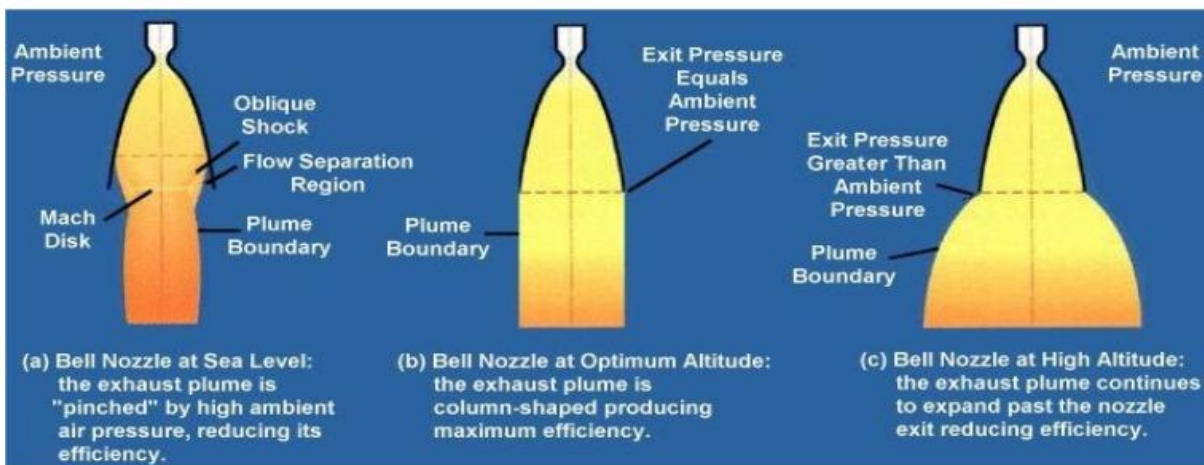
Nejvýhodnější je úhel rozevření  $\alpha = 15^\circ$ . Délka trysky  $L_d$  je pak úměrná rozdílu průměrů

$$L_d = \frac{d_a - d_{kr}}{2 \cdot \tan \alpha}$$

Pro zkrácení trysky (a tedy i snížení její hmotnosti) se používá zvonovitý tvar trysky, která se nejdříve za kritickým průměrem nejdříve rozšiřuje s úhlem  $20^\circ$ - $50^\circ$  což vede k větší expanzi a u ústí se tok narovná v úhlu  $2^\circ$ - $5^\circ$ . Tím se délka zvonovité trysky snižuje na 70-80% délky trysky pouze konické.

Pokud je  $p_a > p_H$  mluvíme o neúplné expanzi; plyn vytékající z trysky se při přebytečném tlaku  $p_a$  rozpíná a mísí s vnějším prostředím. Rychlost se dále nezvětšuje, protože se tvoří víry.

Pokud je  $p_a < p_H$  Za hranicemi trysky se tok zpomaluje a rychlost se zmenšuje na podzvukovou. Přitom vznikají rázové vlny, které srůstem  $p_H$  se přibližují k trysce, případně do ní vstupují. Vzniká pak odtrhávání toku od stěn a tvoří se víry. Maximálního tahu je dosaženo, pokud  $p_a = p_H$ .



Rychlost hoření prachu v závislosti na pracovním tlaku v komoře se řídí buď lineárním nebo exponenciálním zákonem hoření:

$r_h = a + b \cdot p$  (lineární zákon),  $r_h = a \cdot p^n$  (exponenciální zákon),  $a$ ,  $b$ ,  $B$  a  $n$  jsou empirické konstanty. Také se zavádí teplotní citlivost  $E$  na počáteční teplotu elementu TPL. Pak je exponenciální zákon ve tvaru

$r_h = a \cdot \exp[E \cdot (t - t_{okolí})] p^n$  E bývá 0,002 až 0,008; n 0,2 až 0,6. Někdy se rychlost hoření vyjadřuje pomocí standardní rychlosti hoření (při 70 bar; 7MPa)  $r = r_7 \cdot (p/7)^n$  (pokud tlak v MPa).

Jelikož měrná hmotnost prachu je mnohem větší než měrná hmotnost vzniklých spalín a s použitím exponenciálního zákona závislosti rychlosti hoření na tlaku ve spalovací komoře dostaneme závislost tlaku ve spalovací komoře na povrchu hoření TPH ve stacionárním případě ve tvaru:

$$p_0 = \left( \frac{S_h}{S_{kr}} B \beta \rho_p \right)^{\frac{1}{1-n}}$$

$$p_0 = \left[ \frac{S_h \rho_p a \cdot \exp(E(t - t_{okolí})) \sqrt{RT_0/M_v}}{S_{kr} \left( \frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa + 1}}} \right]^{\frac{1}{1-n}}$$

Kde  $F = S_h/S_{kr}$  poměr mezi hořícím povrchem a kritickým průřezem trysky se nazývá *zahrazením*.  $\rho_p$  je hustota elementu. Analýza stability hoření TPH ukazuje, že stabilní hoření nastává pro TPH s  $n < 1$ , kdy se tlakové fluktuace zmenšují. Naopak u TPH s  $n > 1$  se odchylky tlaku od stacionární hodnoty zvyšují a tak motor buď přestane hořet, nebo exploduje. Většina TPL, které se používají, mají  $n = 0,2 \div 0,8$ .

#### Struktura a vlastnosti některých druhů tuhých pohonných látek [2]

Složení látky	Obsah ve váhových %	Teplota hoření (°K)-konst. $p_0$	Specifický impuls (Ns/kg)	Měrná váha (kg/l)
Nitrocelulosa (13,25% N <sub>2</sub> )	52,2	3170	2300	1,60
Nitroglycerin	43,0			
Diethylftalát	3,0			
Difenylamin	0,6			
Dusičnan draselný	1,1			
Nigrosin (barvivo)	0,1			
KClO <sub>4</sub>	76	2060	1820	1,77
Asfalt	16,8			
Nafta	7,2			
NH <sub>4</sub> ClO <sub>4</sub>	80	2670	2000	1,75
Kaučuk	20			
NH <sub>4</sub> NO <sub>3</sub>	80	1720	2250	1,55
Kaučuk	18			
Katalyzátor	2			

V leteckých startovacích raketách je používáno palivo NRDC:

Pikrát Amonný ..... 45%  
 Dusičnan Sodný ..... 45%  
 Pryskyřičnaté pojivo ..... 10%

Také se používalo palivo GALCIT, které obsahuje:

KClO<sub>4</sub> (chloristan draselný)..... 75%

Přírodní asfalt ..... 25%

Obě tyto hmoty dosahují výtokové rychlosti okolo 1800m/s, však pro některé své vlastnosti se nehodí pro bojové rakety.

Sovětský raketový kordit:

Nitrocelulóza ..... 56,5% (obsah dusíku 12,2%)

Nitroglycerin ..... 28%

DNT ..... 12%

Centralit ..... 4,5%

Tento kordit dosahuje výtokové rychlosti okolo 2000m/s.

Americký raketový balsit:

Nitrocelulóza .....51,5% (obsah dusíku 13,35%)

Nitroglycerin .....43,5%

Centralit .....1,3%

Dietylftalát .....3,25%

Síran draselný .....1,25%

Saze .....0,2%

Dosahuje výtokové rychlosti 2200 m/s (vyšší výtokové rychlosti se dosáhlo na úkor jiných vlastností)

Německý diglykolý raketový prach:

Nitrocelulóza .....61,5% (obsah dusíku 12,6%)

Diglykol .....35%

Difenyluretan .....2,10%

Etylfenyluretan .....1,40%

Dosahuje výtokové rychlosti okolo 2000 m/s.

Všeobecně nutno zdůraznit, že koloidní hmoty zůstávají svými vlastnostmi za pohonnými hmotami složenými, a proto se od jejich používání postupně upouští.

Amatérská směs:

KNO<sub>3</sub>..... 74,5 %

Cukr ..... 25,5 %

NH<sub>4</sub>NO<sub>3</sub>..... 85-90 %

elastomér ..... 25,5 %

Rychlost hoření 0,096 cm/s at 6,8 bar a 0,016 cm/s at 20,6 bar (?). Teplota hoření je cca. 1800K a I<sub>sp</sub>=180.

KNO<sub>3</sub>..... 72 %

Dřevěné uhlí ..... 24 %

Síra ..... 4 %

The burning rate of this rocket fuel depends much less on pressure than that of black powder. This widens the acceptable limits of the ratio nozzle area/fuel surface area.

Space Shuttle Boosters propellant

Aluminum powder.....	16
Ammonium perchlorate.....	69.9
Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub> catalyst.....	0.07
Rubber based binder of polybutadiene acrylic acidacrylonitrile.....	12.04
Epoxy curing agent.....	1.96
<u>ESTES C-class rocket engine propellant</u>	
KNO <sub>3</sub> .....	71.79
Síra.....	13.45
Černé uhlí.....	13.81
Dextrin.....	0.95

#### Propellant 1

20% R20LM HTPB (Low molecular weight HTPB)  
 20% Magnesium powder(-650 mesh)  
 60% Ammonium Nitrate powder  
 (Curing ratio = 0.19) Rubinate M MDI Curing Agent  
 Burn rate coefficient = 0.0061 (? inch/sec)  
 Burn rate exponent = 0.507

#### Propellant 2

19% R20LM HTPB (Low molecular weight HTPB)  
 16% Aluminum powder (-400 mesh or 20 micron)  
 65% Ammonium Perchlorate (200 micron)  
 (Curing ratio = 0.19) Mondur MR MDI Curing Agent  
 Burn rate coefficient = 0.0374  
 Burn rate exponent = 0.28

Note: Curing agent ratio = (Wt. of curing agent)/(Wt. of binder) = (0.8) \* (Equivalent weight of curing agent)/(Equivalent weight of binder)

This assumes 80% linkage for a flexible propellant. Other curing agents can be used, but an adjustment to the curing agent ratio will have to be made.

<http://homepages.sover.net/~sbjohn/chemistry/chemx/fuels.html>

<https://www.nakka-rocketry.net/anexp.html>

<http://www.wydawnictwa.ipo.waw.pl/cejem/vol-9-4-2012/Shekhar.pdf>

<http://ijseas.com/volume2/v2i4/ijseas20160451.pdf>

<http://www.transformacni-technologie.cz/40.html>

Orientační rychlosti hoření raketového paliva:

Tlak (bar)	Rychlost (mm/s)
40	5 - 8
70	7 - 12
100	9 - 14

### Vyjádření pomocí Machova čísla $M$

Rychlost zvuku  $a$  a Machovo číslo  $M$ :  $a = \sqrt{\kappa RT}$        $M = \frac{v}{a}$

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\kappa-1}{\kappa} M^2 \quad \frac{p_0}{p} = \left[1 + \frac{\kappa-1}{\kappa} M^2\right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad \frac{\rho_0}{\rho} = \left[1 + \frac{\kappa-1}{\kappa} M^2\right]^{\frac{1}{\kappa-1}}$$

Poměr průřezu trysky ke kritickému

$$\frac{S}{S_{kr}} = \frac{1}{M} \left[ \frac{1 + \frac{\kappa-1}{\kappa} M^2}{1 + \frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]^{\frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}}$$

$$\frac{S_{kr}}{S_a} = \left(\frac{\kappa+1}{2}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \left(\frac{p_a}{p_0}\right)^{\frac{1}{\kappa}} \sqrt{\left(\frac{\kappa+1}{\kappa-1}\right) \left[1 - \left(\frac{p_a}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right]}$$

$$\text{Tah motoru: } P = S_{kr} p_0 \sqrt{\frac{2\kappa^2}{\kappa-1} \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}} \left[1 - \left(\frac{p_a}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right]} + (p_a - p_{okolí}) S_a = C_f S_{kr} p_0$$

Hodnota  $C_f$  u motoru s cukr/ $\text{KNO}_3$  směsí bývá 1,5, zatímco teoretická by byla okolo 1,64. Ztráty jsou v důsledku dvojrozměrného toku.

Charakteristická rychlost  $c^*$  je odrazem účinnosti hoření,  $I_{sp}$  je specifický impuls (v jednotkách N.s/kg = m/s)

$$c^* = \sqrt{\frac{\frac{RT_0}{M_v}}{\kappa \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}}}} \quad I_{sp} = c^* \frac{C_f}{g} = \frac{I_{celk}}{m_{paliva}} = \frac{1}{g} \sqrt{\frac{2RT_0}{M_v} \left(\frac{\kappa}{\kappa-1}\right) \left[1 - \left(\frac{p_a}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right]}$$

Poměry na kolmé rázové vlně (Rankine-Hugoniotovy rovnice):

$$Ma_2^2 = \frac{\frac{\kappa-1}{2} Ma_1^2 + 1}{\kappa Ma_1^2 - \frac{\kappa-1}{2}} \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma_1^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma_2^2} \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{Ma_1}{Ma_2} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$

### Orbitální mechanika

Rychlost družice v bodech eliptické dráhy

$$v^2 = M \cdot G \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

Kde  $M$  hmotnost Země  $5,7 \times 10^{24}$  kg,  $G$  gravitační konstanta  $6,67 \times 10^{-11}$  N.m<sup>2</sup>.kg<sup>-2</sup>

$a$  velikost velké poloosy elipsy (m),  $r$  vzdálenost satelitu od středu Země (m). Velká poloosa dráhy je aritmetický průměr z vzdáleností obou apsid od těžiště centrálního tělesa.  $M.G = 3,8019.10^{14}$ , odmocnina z  $M.G = 1,9498.10^7$

$$\text{Kruhá rychlost } v_{kruh} = \sqrt{\frac{M.G}{r}} \quad \text{úniková } v_{unik} = \sqrt{\frac{2.M.G}{r}}$$

Oběžná doba eliptické dráhy:  $T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$  kde  $\mu = G(M_1 + M_2)$ ,  $a$  velká poloosa

Specifická orbitální energie eliptické oběžné dráhy je záporná a rovnice pro zachování

$$\text{orbitální energie } \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} = \varepsilon < 0$$

Pokud chceme vzdálit polohu jedné apsidy (*perigeum*, *apogeum*) od centrálního tělesa, musí družice zažehnout svůj motor v protilehlé apsidě a pozor – ve směru letu! Jinými slovy – satelit musí zrychlit. Pokud naopak chceme snížit polohu apsidy, musíme i tentokrát zapálit motor v protilehlé apsidě, tentokrát ale proti směru letu. Družice tedy zpomalí, což ovlivní polohu protilehlé apsidy. Přechod na vyšší kruhovou dráhu tedy vyžaduje dvě změny rychlosti. Z rozdílů rychlostí v původní a nové apsidě spočítáme potřebné  $\Delta v$ .

Přechod na vyšší dráhu při změně sklonu oběžné dráhy. Místo aby  $vk^2 = vea + \Delta v^2$ , tak je dáno vektorově obecným trojúhelníkem:  $\Delta v^2 = vea^2 + \Delta v^2 - 2.vea. \Delta v \cdot \cos(\alpha)$

kde  $vk^2$  kruhá rychlost na vyšší dráze,  $vea$  rychlost apoapsidě eliptické dráhy,  $\Delta v^2$  potřebná změna rychlosti,  $\alpha$  úhel změny dráhy.

## Model k simulaci

Model tvoří soustava obyčejných diferenciálních rovnic, která se řeší numericky v čase

- y(1) odhořená lineární vzdálenost TPH ( $\Delta$ ) (m)
- y(2) hořící povrch  $S_h$  ( $m^2$ )
- y(3) průtočné hmotové množství  $m_p$ , G (kg/s)
- y(4) skutečná rychlost  $v$  (m/s) včetně vlivu gravitace a odporu vzduchu
- y(5) dosažená výška  $h$  (m)
- y(6) impuls  $I$  (N.s)
- y(7) délka  $x$  (m)

Počáteční podmínky:  $y(i) = 0$  kromě  $y(2) = \text{počáteční hořící povrch } S_{h0} = \text{Povrch}(\text{element}, 0, 1)$

Rovnice modelu:

$$A_m = a \cdot \exp(E \cdot (t - t_{okol})) \cdot \rho_p$$

$$B_g = S_{kr} \left( \frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa + 1} \frac{1}{RT_0}}$$

$$p = \left[ \frac{A_m \text{Povrch}(element, y(1))}{B_g} \right]^{\frac{1}{1-n}} \quad \text{rovnovážný tlak ve spalovací komoře}$$

$$pp = r \text{Horeni}(a, E, n, p) = a \cdot \exp(E \cdot (t - t_{okol})). p^n$$

$y_1$  odhořelá vrstva paliva       $y_2$  hořící povrch

$$dS = \frac{dS}{dy_1} \quad \text{numerická derivace } \text{Povrch}(element, y_1) \text{ podle } y_1$$

$$\frac{dy_1}{d\tau} = pp \quad \frac{dy_2}{d\tau} = pp \cdot dS$$

$y_3$  vyhořelá hmota paliva       $y_4$  rychlost rakety       $y_5$  výška

$$\frac{dy_3}{d\tau} = pp \cdot \text{Povrch}(element, y_1) \cdot \rho_P \quad \rho_P \text{ hustota TPH}$$

$$\frac{dy_4}{d\tau} = \frac{IIF(p > 0, w, 0) \cdot \frac{dy_3}{d\tau} \cdot \frac{1 + \cos \alpha}{2} + S_a(p_a - p_H) - 0,602 \cdot c_x \cdot \pi \cdot \frac{D^2}{4} v^2}{(m_{celk} - y_3)} - 9,81$$

kde  $c_x$  koef. odporu (0,2),  $v = y_4$  rychlost rakety,  $m_{celk}$  celková hmotnost rakety včetně TPH

$$\frac{dy_5}{d\tau} = y_4 \quad \frac{dy_6}{d\tau} = \frac{dy_3}{d\tau} \quad y_6 \quad \text{impuls}$$

Po dohoření paliva, když  $S_h = 0$  je výhodnější integrovat setrvačný let už jen jako dvě rovnice pro rychlost  $v$  a výšku  $h$ .

$$\frac{dv}{d\tau} = -9,81 - 0,602 \cdot c_x \cdot \pi \cdot \frac{D^2}{4} v^2 \quad \frac{dh}{d\tau} = v \quad \text{s poč. podmínkami na konci chodu motoru}$$

Na konci výstupních integračních intervalů  $\Delta\tau$  se dopočítávají veličiny:

$$P = G \cdot w \frac{1 + \cos \alpha}{2} + S_a(p_a - p_H) \quad \text{tah (N)} \quad G = \frac{dy_3}{d\tau}$$

$\frac{S_a}{S_{kr}}$  a  $d_a$  odpovídající expanzi na okolní tlak  $p_H$ . Také se dopočte expanzní tlak  $p_a$  pro daný

výstupní průměr trysky  $d_a$  čili  $S_a$ .  $\alpha$  je úhel rozšíření trysky.

V případě obecného, šikmého letu se integrují dvě složky rychlosti  $v_x$  a  $v_y$ , a dvě vzdálenosti – délka a výška, tedy čtyři rovnice, místo dvou (celkem osm).

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 \quad \frac{dv_y}{d\tau} = -9,81 - 0,602 \cdot c_x \cdot \pi \cdot \frac{D^2}{4} v^2 \cdot \sin \alpha_{xy} \quad \frac{dh}{d\tau} = v_y$$

$$\frac{dv_x}{d\tau} = -0,602 \cdot c_x \cdot \pi \cdot \frac{D^2}{4} v^2 \cdot \cos \alpha_{xy} \quad \frac{dx}{d\tau} = v_x$$

s poč. podmínkami na konci chodu motoru;  $\alpha_{xy}$  je okamžitý úhel dráhy

Takovýto model má v aktivní dráze letu stále konstantní náměr (jako by byl řízen po přímce).

Chceme-li zohlednit gravitací klesající náměr, je nutné integrovat v aktivním letu další diferenciální rovnici pro náměr  $\alpha$ . Z důvodů integrační stability by se derivace měla počítat až pro celkovou rychlost  $> 30$  m/s.

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = -\frac{g \cdot \cos(\alpha)}{v} \quad \alpha(0) = \alpha_0 \quad \text{kde } v \text{ je rychlost}$$

Odkaz na kurs návrhu raket: <https://www.youtube.com/watch?v=vQilt-jX0BM&list=PL99EA5ECCC34949DB&index=1>

(anglicky Indian Institute of Technology Madras)